

## 回転渦み点流れ

本稿では、非圧縮性流れを仮定した Navier-Stokes 方程式の厳密解の一例として、回転渦み点流れ（回転円板に対する軸対称渦み点流れ）を考える。壁面から十分に離れた領域では、ポテンシャル流れと見なされ、それは次式で与えられる（ $u, v, w$  はそれぞれ、半径方向、周方向、軸方向の速度成分とする）。

$$u = ar, \quad v = 0, \quad w = -2az \quad (a > 0) \quad (1)$$

軸対称円筒座標系の Navier-Stokes の運動方程式は、

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

と与えられる。境界層の内外の領域において  $\partial w / \partial r = 0$  が成立する相似解を仮定する。式(4)を  $r$  で微分することにより次式を得る。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad (5)$$

この式の意味するところは、半径方向の圧力勾配が  $z$  方向に変化しないということである。つまり、

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} = f(r) \quad (6)$$

となる。次に、式(2), (3)を無次元化するにあたり、以下のように無次元変数を置く。

$$R = \frac{r}{r_a}, \quad Z = \frac{z}{z_a}, \quad U = \frac{u}{u_a}, \quad V = \frac{v}{v_a}, \quad W = \frac{w}{w_a} \quad (7)$$

大文字は無次元変数を示し、右辺の下付添え字  $a$  が付くものが未定参照量を示す。式(7)を式(2)に代入し整理すると、

$$U \frac{\partial U}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W \frac{\partial U}{\partial Z} - \underbrace{\frac{v_a^2}{u_a^2}}_{[4]} \frac{V^2}{R} = -\frac{r_a}{\rho u_a^2} \frac{\partial p}{\partial r} + \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R^2} \right) + \underbrace{\frac{\nu r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \quad (8)$$

式(3)に代入し整理すると、

$$U \frac{\partial V}{\partial R} + \underbrace{\frac{w_a r_a}{z_a u_a}}_{[1]} W \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{UV}{R} = \underbrace{\frac{\nu}{r_a u_a}}_{[2]} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R^2} \right) + \underbrace{\frac{\nu r_a}{z_a^2 u_a}}_{[3]} \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}$$

境界条件

$$\begin{cases} z=0: & u=w=0, \quad v=\omega r \\ z \rightarrow \infty: & u=ar, \quad v=0, \quad w=-2az \end{cases} \quad (9)$$

についても無次元化する.

$$\begin{cases} Z=0: & U=W=0, \quad V=\frac{\omega r_a}{\underbrace{v_a}_{[5]}} R \\ Z \rightarrow \infty: & U=\frac{ar_a}{\underbrace{u_a}_{[6]}} R, \quad V=0, \quad W=-2 \frac{az_a}{\underbrace{w_a}_{[7]}} Z \end{cases} \quad (10)$$

無次元速度は,

$$(U, V, W) = f \left( R, Z, \frac{w_a r_a}{z_a u_a}, \frac{\nu}{r_a u_a}, \frac{\nu r_a}{z_a^2 u_a}, \frac{v_a^2}{u_a^2}, \frac{\omega r_a}{v_a}, \frac{ar_a}{u_a}, \frac{az_a}{w_a} \right) \quad (11)$$

これより, [1]から[7]の各無次元量について, 未定参照量を決定していく.

$$[4]=1, [6]=1 \text{ と置くことにより, } u_a = v_a = ar_a \quad (12)$$

$$[3]=1 \text{ と置くことにより, 式(12)を代入し, } z_a = \sqrt{\frac{\nu r_a}{u_a}} = \sqrt{\frac{\nu}{a}} \quad (13)$$

$$[1]=1 \text{ と置くことにより, 式(12)(13)を代入し, } w_a = \frac{z_a u_a}{r_a} = \frac{\sqrt{\nu/a} \cdot ar_a}{r_a} = \sqrt{a\nu} \quad (14)$$

$$[2] \text{ は } \frac{\nu}{r_a u_a} = \frac{\nu}{ar_a^2} \equiv \frac{1}{Re} \text{ (後にわかるがここは無関係)}$$

$$[6] \text{ は } \frac{az_a}{w_a} = \frac{a}{\sqrt{a\nu}} \sqrt{\frac{\nu}{a}} = 1$$

$$[5] \text{ は } \frac{\omega r_a}{v_a} = \frac{\omega}{a} \quad (15)$$

$$[7] \text{ は } \frac{az_a}{w_a} = \frac{a}{\sqrt{a\nu}} \sqrt{\frac{\nu}{a}} = 1$$

さらに,  $R=1$  と置き, 相似解を仮定する. つまり, 式(7)は次式のように置き換えられる.

$$Z = \frac{z}{z_a} = z \sqrt{\frac{a}{v}} \equiv \eta, \quad U(\eta) = \frac{u(r, z)}{ar}, \quad V(\eta) = \frac{v(r, z)}{ar}, \quad W(\eta) = \frac{w(z)}{\sqrt{av}} \quad (16)$$

式(16)を利用して、式(2)の各項を求める。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(arU) = aU + ar \frac{\partial U}{\partial r} = aU + ar \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} = aU$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(arU) = ar \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = ar \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{a}{v}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r}(aU) = a \frac{\partial U}{\partial r} = a \frac{dU}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{aU}{r}$$

$$-\frac{u}{r^2} = -\frac{aU}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( ar \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{a}{v}} \right) = ar \sqrt{\frac{a}{v}} \frac{d^2 U}{d\eta^2} \sqrt{\frac{a}{v}} = \frac{a^2 r}{v} \frac{d^2 U}{d\eta^2}$$

$$-\frac{v^2}{r} = -\frac{(arV)^2}{r} = -a^2 r V^2$$

これらを式(2)に代入し、

$$arU \cdot aU + \sqrt{av}W \cdot ar \frac{dU}{d\eta} \sqrt{\frac{a}{v}} - a^2 r V^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \frac{a^2 r}{v} \frac{d^2 U}{d\eta^2}$$

整理して次式を得る。

$$\underbrace{U^2 + W \frac{dU}{d\eta} - V^2 - \frac{d^2 U}{d\eta^2}}_{\text{function of } z} = -\frac{1}{\rho a^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} \equiv -P_R \quad (17)$$

左辺は  $z$  の関数であり、右辺は  $r$  の関数であるから、結局はそれぞれが定数でなければならない。右辺に示される無次元の半径方向圧力勾配を次式で定義する。

$$P_R \equiv \frac{1}{\rho a^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{f(r)}{\rho a^2 r} = \frac{k_p}{\rho a^2} = \text{const.} \quad (18)$$

ここで、 $k_p$  は一定値であり、境界層外のポテンシャル流の状況から決めることができる。

式(18)を  $r$  で積分して、次式のように圧力分布が  $r$  の関数と  $z$  の関数の和として表現されることが示される。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = k_p r \Rightarrow p(r, z) = \frac{1}{2} k_p r^2 + p_2(z) \quad (19)$$

では,  $k_p$  を求める. ポテンシャル領域における半径方向の運動方程式は次式で与えられる.

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

これに, 式(1)および(19)を代入して,

$$ar \cdot a = -\frac{1}{\rho} k_p r \quad \text{つまり} \quad k_p = -\rho a^2 \quad (20)$$

無次元圧力勾配は, 式(18)から

$$P_R = \frac{k_p}{\rho a^2} = \frac{-\rho a^2}{\rho a^2} = -1 \quad (21)$$

と求まる. 結局,  $r$  方向の運動方程式は

$$U^2 + W \frac{dU}{d\eta} - V^2 = 1 + \frac{d^2U}{d\eta^2} \quad (22)$$

同様にして周方向の運動方程式は

$$2UV + W \frac{dV}{d\eta} = \frac{d^2V}{d\eta^2} \quad (23)$$

また連続の式は, 即座に以下のように得られる.

$$2U + \frac{dW}{d\eta} = 0 \quad (24)$$

続いて, 式(4)の  $z$  方向の運動方程式は, 圧力を求めるためだけに使われるが, 参考までに

示す.  $p_2(z) = \rho av P(\eta)$  と置けば,

$$W \frac{dW}{d\eta} = -\frac{dP}{d\eta} + \frac{d^2W}{d\eta^2} \quad (25)$$

を得る. 最終的に, 無次元量の定義は以下の通りである.

$$\eta = z \sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad u(r, z) = ar \cdot U(\eta), \quad v(r, z) = ar \cdot V(\eta), \quad (26)$$

$$w(z) = \sqrt{av} \cdot W(\eta), \quad p(r, z) = -\frac{1}{2} \rho a^2 r^2 + \rho av \cdot P(\eta)$$

### 数式のまとめ

以下の連立常微分方程式を反復法などで解く.

$$2U + W' = 0 \quad W \text{ を求める}$$

$$-U^2 - WU' + V^2 + 1 + U'' = 0 \quad U \text{ を求める}$$

$$-2UV - WV' + V'' = 0 \quad V \text{ を求める}$$

$$P = -\frac{1}{2}W^2 + W' \quad P \text{ を求める}$$

B. C.

$$\begin{cases} \eta = 0: & U = W = 0, \quad V = \omega/a \equiv V_\omega \\ \eta \rightarrow \infty: & U = 1, \quad V = 0 \end{cases}$$

なお, 式(10)の境界条件において,  $\eta \rightarrow \infty: W = -2\eta$  となるが, これを境界条件として与えることはできない.

数値計算により得られた各速度成分の値は,  $\eta$  が十分に大きくなると,  $W \cong -2\eta + 2C$  であるとすると, 式(24)をふまえ排除厚さは以下のようなになる.

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{ar}\right) dz = \sqrt{\frac{v}{a}} \int_0^\infty (1 - U) d\eta = \sqrt{\frac{v}{a}} \left[ \eta + \frac{W}{2} \right]_0^\infty = C \sqrt{\frac{v}{a}} \quad (27)$$

### 解析結果

種々の円板の回転速度  $V_\omega$  に対する排除厚さの係数  $C$  を表 1 にまとめる. 円板の回転が速くなると, 排除厚さが薄くなり,  $V_\omega = 5$  程度でほぼ 0 となり,  $V_\omega = 10$  では負の値をとる. 図 1 には, 各速度成分を示す. 図 2 には, 排除厚さがゼロになるとき ( $V_\omega = 5.094$ ) の可視化の様子を示す.

表 1

$V_\omega$	$C$
0	0.5689
1	0.5231
3	0.3687
5	0.1019
10	-0.8810

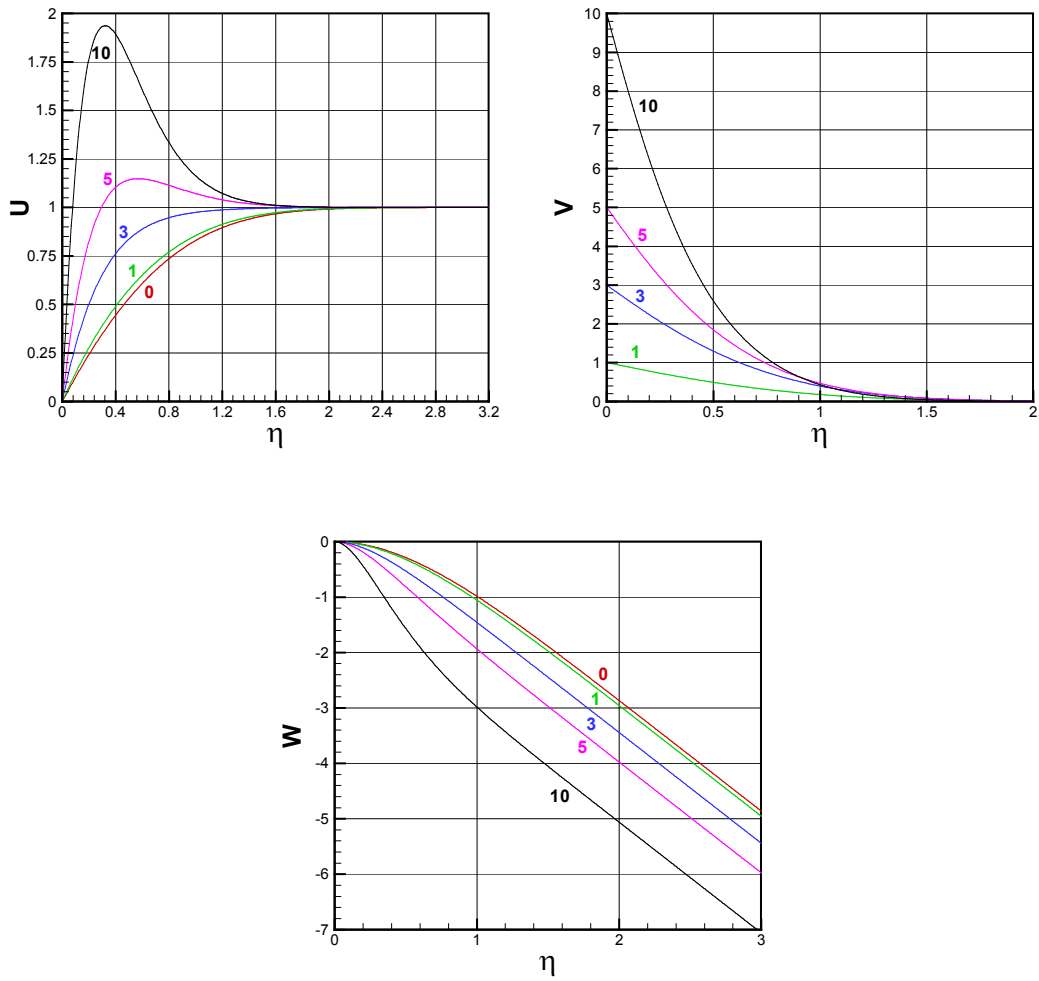


図1 回転渦み点流れ（半径方向，周方向，軸方向速度）の計算結果

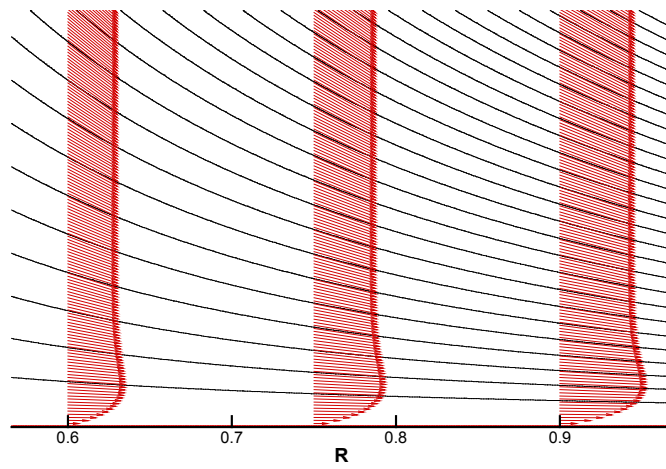


図2 回転渦み点流れの可視化（黒線は Stokes 流線，赤は子午面速度ベクトル）